Tentamen Numerieke Wiskunde 2
4 februari 2003

Tijd: 9.00-12.00 uur

N.B. De notatie van het boek van Burden en Faires is aangehouden tenzij anders aangegeven.

Opgave 1

Beschouw het begin-randwaarde probleem

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c\frac{\partial u}{\partial x} - b(x)$$

voor x in $[0,1]$, $t \geq 0$ met $u(0,t) = u(1,t) = 0$ en $u(x,0)$ gegeven.

a. Toon aan dat een standaard ruimte-discretisatie van het probleem het volgende stelsel gewone differentiaalvergelijkingen oplevert:

$$\frac{dv}{dt} = Av - b,$$

waarin

$$\begin{aligned}
(Av)_1 &= ((1 - \frac{hc}{2})v_2 - 2v_1)/h^2, \\
(Av)_j &= ((1 - \frac{hc}{2})v_{j+1} - 2v_j + (1 + \frac{hc}{2})v_{j-1})/h^2 \text{ for } j = 2, ..., m-2, \\
(Av)_{m-1} &= (-2v_{m-1} + (1 + \frac{hc}{2})v_{m-2})/h^2
\end{aligned}$$

en $b_j = b(x_j)$ met $h = 1/m$ en m een geheel getal. Hoe ziet de locale afbreekfout er voor deze discretisatie uit?

b. Localiseer de eigenwaarden van de matrix A gedefinieerd onder a met behulp van de stelling van Gerschgorin voor het geval $|hc| < 2$, wanneer bovendien gegeven is dat in dat geval de matrix gelijkvormig is met een symmetrische matrix. Wat gebeurt er als $|hc| = 2$?

Voor de integratie van het onder a gegeven systeem wordt de volgende impliciete methode onderzocht (hierin is k de stap: $t_{i+1} = t_i + k$)

$$w_{i+1} = \frac{4}{3}w_i - \frac{1}{3}w_{i-1} + \frac{2}{3}kf(t_{i+1}, w_{i+1}).$$

c. Bepaal de locale afbreekfout van deze methode.

d. Toon aan dat de methode aan de wortelconditie voldoet en zelfs sterk stabiel is.

e. Pas de methode toe op $y' = \lambda y$ en bepaal de algemene oplossing van het resulterende differentieschema. Waardoor worden de coefficienten van de twee daarin optreden termen vastgelegd?

f. Toon aan dat beide wortels bepaald in het vorige onderdeel in absolute waarde altijd kleiner dan 1 zijn voor negatief reële λ. Is de methode hierdoor geschikt voor het stelsel uit onderdeel a?

Opgave 2

Beschouw het stelsel $Ax = b$.

a. Toon aan dat het aantal bewerkingen (gerekend in het aantal vermenigvuldigingen) voor het maken van een LU-decompositie van A en voor het daarmee oplossen van $LUx = b$ zich voor grote n gedraagt als respectievelijk $n^3/3$ en n^2. Hierbij mag u het pivoteren buiten beschouwing laten. { N.B. $\sum_{k=1}^{n} k^2 \approx n^3/3$ voor grote n }

b. In begin-randwaardeproblemen treedt bij impliciete methoden in elke tijdstap een stelsel op. Wat zou op grond van onderdeel a een efficiënte strategie zijn wanneer de te integreren vergelijking lineair dan wel licht niet-lineair is?

c. Toon aan dat een strict diagonaal dominante matrix niet singulier is.

d. Stel A is niet singulier en stel dat door verstoringen in het rechterlid het stelsel $A\tilde{x} = b + r$ wordt opgelost. Neem $e = \tilde{x} - x$, de fout in x. (i) Geef een afschatting van de relatieve fout in x in termen van de relatieve fout in b. (ii) Wat zegt deze ongelijkheid? (iii) Geef hierin het conditiegetal aan en bepaal dat getal, gebruikmakend van de 1-norm, voor

$$\begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

Opgave 3

Beschouw het niet-lineaire probleem $F(x) = 0$, waaruit men x wil oplossen gebruikmakend van de functie

$$G(\lambda, x) = \lambda F(x) + (1 - \lambda)[F(x) - F(x_0)]$$

waarin x_0 een zekere benaderende oplossing van $F(x) = 0$ is.
Hieronder mag u aannemen dat $F(x) = 0$ evenveel vergelijkingen als onbekenden heeft en dat er geen bijzonderheden (zoals het singulier zijn van Jacobianen) optreden bij het oplossen.

a. Toon aan dat x_0 de oplossing is van $G(0, x) = 0$. Toon verder aan dat de oplossing van $G(1, x) = 0$ de oplossing van $F(x) = 0$ geeft. Wat is het voordeel van het introduceren van de functie G voor het oplossen van het niet-lineaire probleem?

b. Toon aan dat het oplossen van $G(\lambda, x) = 0$ equivalent is met het oplossen van een differentiaalvergelijking van de vorm

$$\frac{d}{d\lambda} x = -[J(x)]^{-1} F(x_0)$$

met $x(0) = x_0$ en geef $J(x)$.

c. Stel dat de Euler methode wordt gebruikt voor de differentiaalvergelijking van het vorige onderdeel en er slechts één stap gedaan wordt ter grootte 1. Toon aan dat dat precies een eerste stap is in een Newton methode.

d. De numerieke oplossing van de differentiaalvergelijking zal in het algemeen voor $\lambda = 1$ niet precies de oplossing van het niet-lineaire probleem geven (waarom?). Hoe zou de overeenkomst die in het vorige onderdeel is gesignaleerd met de Newton methode gebruikt kunnen worden om de afwijking kleiner te maken?